Niveau : Deuxième Bac sciences PC /SVT /ECO

CENTRE EL MOUMEN

Résumé

NOMBRES COMPLEXES

Plan de chapitre 7 : NOMBRES COMPLEXES :

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen | 06 66 73 83 49 | Prof El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen | 06 66 73 83 49 | https://www.elmoumen.academy

CENTRE EL MOUMEN — Résumé : NOMBRES COMPLEXES — 2BAC BioF — Prof : EL MOUMEN

A) Ensemble des nombres complexe z

$\mathbb{C} = \{z = a + ib \setminus (a; b) \in \mathbb{R}^2 \ \ et \ \ i^2 = -1\}$

➢ L'écriture $a + ib$ s'appelle la forme algébrique du nombre $z = a + ib$

1) Conjugué d'un nombre complexe z : $\bar{z}$

$z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib$; $\bar{z}$ le conjugué de z

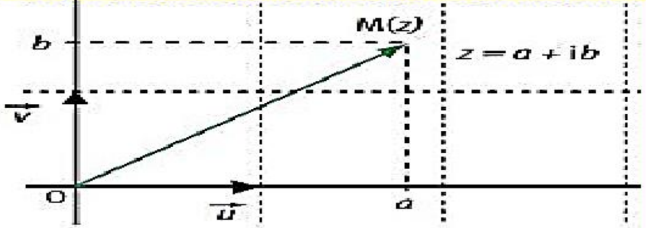
Propriété de conjugué d'un complexe

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$; $\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$; $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

2) Représentation géométrique d'un complexe



Soit $A(z_A)$; $B(z_B)$ et $C(z_c)$des points du plan :

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- L'affixe de I le milieu du segment [AB] est z_I tel que : $Z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$
- Points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in IR$

3) Module d'un nombre complexe z : $|z|$

Le module de $z = a + ib$ d'image M est le nombre réel positif noté $|z|$ définie par

$$|z| = OM = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

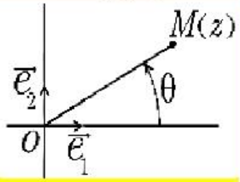
Propriété de module et Distance

- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z^n| = |z|^n$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points alors la distance AB définie par : $AB = |z_B - z_A|$

B) Argument d'un complexe z : $arg(z)$

On appelle argument de z une mesure θ, en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$

$arg(z) \equiv \overline{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})}[2\pi]$



1) Opérations sur l'argument

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

2) Forme trigonométrique d'un complexe

$z = a + ib = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$

avec $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$

L'écriture : $z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$ est appelé forme trigonométrique du complexe z avec θ un argument de z

Détermination du forme trignométrique

➢ Cas particulier $a; b \in \mathbb{R}_+^*$

$z = a \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$ et $|z| = a$

$z = -a \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$ et $|z| = a$

$z = ib \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|z| = b$

$z = -ib \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $|z| = b$

➢ Cas générale ou $z = a + ib$; $a; b \in \mathbb{R}^*$

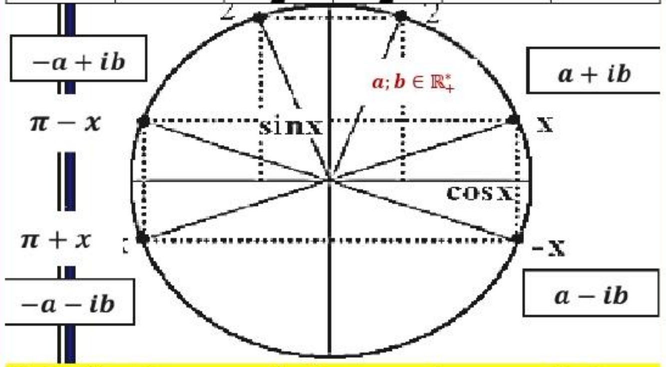
1) On calcule $|z|$ le module de z

2) Factorisation: $z = a + ib = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right)$

3) On cherche θ un argument de z tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$

en utilisant le tableau et le cercle suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



3)Opérations sur la forme trigonométrique

On pose $z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = [r, \theta]$

Et : $z' = |z'|\left(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right) = [r', \theta']$

➢ $zz' = [r, \theta][r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$

➢ $\frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$

➢ $\frac{1}{z} = \frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right]$ *Prof : El Moumen*

➢ $z^n = [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$; $n \in Z$

4) Interprétation géométrique d'argument

➢ $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

➢ $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})} \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

➢ (AB) // (DC) $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$

➢ $(AB) \perp (DC) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

* A,B,C et D sont cocycliques (appartenant au même cercle) $\Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}\right) \in IR$

C) Notation exponentielle $e^{i\theta}$

On note $e^{i\theta}$ le complexe de module 1 et d'argument θ donc $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

1) Forme exponentielle : $z = r\, e^{i\theta}$

$z = |z| \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = |z|\ e^{i\theta}$

L'écriture $z = |z|\ e^{i\theta}$, est appelé forme exponentielle du complexe z

2) Opérations sur la forme exponentielle

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

- $|e^{i\theta}| = 1$; $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$
- $zz' = re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r\,e^{i\theta}}{r'\,e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\ e^{i(\theta-\theta')}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r\,e^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$; $\overline{z} = re^{-i\theta}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Formule de MOIVRE

- $(z)^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

3) Formule D'EULER

$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

D) Résolution d'équations du second degré

Soit dans C l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ tels que a ; b et c sont des réels

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) a deux racines complexes distinctes conjuguées z_1 *et* z_2 *tel que* :

$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

E) Transformation dans le plan

Translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$

Soit M'(z') l'image de point M(z) par translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$

l'écriture complexe du translation $T_{\vec{u}}$

$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{U}$

$\Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$

Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k

M'(z') l'image de M(z) par l'homothétie h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k

l'écriture complexe del'homothétie h

$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Soit M'(z') l'image du point M(z) par la Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ *et d'angle* θ

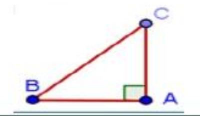
l'écriture complexe de la Rotation R est

$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \overline{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

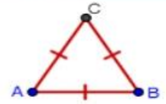
ABC triangle isocèle et rectangle en A

$AB = AC$ et $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$



ABC triangle Equilatérale

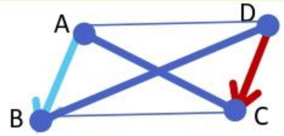
$AB = AC$ et $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$



ABCD est un Parallélogramme

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

2) Les diagonales ont même milieu



ABCD est un Losange

1) Parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires

2) Parallélogramme et $AB = AD$

ABCD est un Rectangle

1) Parallélogramme qui a un angle droit

2) Parallélogramme dont les diagonales sont isométriques

ABCD est un Carré

1) Rectangle et losange

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $AB = AD$

Ensemble des points M(z)

- l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = r$ est un cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r ; $r > 0$
- l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la droite (D) le médiatrice du segment [AB]